MA’RUZA

YUQORI TARTIBLI HOSILALAR. FUNKSIYA DIFFERENSIALI

Mavzuning rejasi

1. Yuqori tartibli hosilalarni topish.
2. Ikkinchi tartibli hosilaning maxanik ma’nosi.
3. Giperbolik funksiyalar va ularni differensiallash.

Tayanch so’z va iboralar: yuquri tartibli hosila, differensiallash, differensial, giperbolik funksiya.

1. Yuqori tartibli hosilalar

$y = f(x)$ funksiyaning ikkinchi tartibli hosilasi deb, uning hosilasidan olingan hosilaga, ya’ni $(y')'$ ga aytiladi. Ikkinchi tartibli hosila quyidagilarning biri bilan belgilanadi:

$$y'',\ f''(x),\ d^2y/dx^2.$$

$y = f(x)$ funksiyaning n-tartibli hosilasi deb uning $(n-1)$ tartibli hosilasidan olingan hosilaga aytiladi va quyidagilarning biri bilan belgilanadi $y^{(n)}$, $f^{(n)}(x)$, $d^n y/dx^n$. Ta’rifga ko’ra $y^{(n)} = \left[y^{(n-1)}\right]'$.

1-misol. $y = (2x^2-7)^3$ funksiyaning ikkinchi tartibli hosilasini toping.

Yechish.

$$y' = \left[(2x^2-7)^3\right]' = 3(2x^2-7)^2(2x^2-7)' = 3(2x^2-7)^2\cdot 4x = 12x(2x^2-7)^2;$$

$$y'' = (y')' = \left[12x(2x^2-7)^2\right]' = 12\{x'(2x^2-7)^2 + x\left[(2x^2-7)^2\right]' = 12\left[(2x^2-7)^2 + 2x(2x^2-7)\cdot 4x\right] =$$

$$= 12(2x^2-7)(2x^2-7+8x^2) = 12(2x^2-7)(10x^2-7).$$

Demak, $y'' = 12(2x^2-7)(10x^2-7)$.

2-misol. $y = x^n$ funksiyaning $n-$tartibli hosilasini toping.

Yechish. $y' = nx^{n-1}$, $y^n = n(n-1)x^{x-2}$, $y''' = n(n-1)(n-2)x^{n-3}$,

$$y^{(4)} = n(n-1)(n-2)(n-3)x^{n-4}, \ldots, \ y^{(n-1)} =$$

$$= n(n-1)(n-2)(n-3)\ \ldots\ [n-(n-2)]x^{n-(n-1)} = n(n-1)(n-2)(n-3)\ \ldots\ 2x$$

$$y^{(n)} = n(n-1(n-2)(n-3)\ \ldots\ 3\cdot 2\cdot 1 = n!$$

($n!$) 1 dan n gacha bo’lgan sonlar ko’paytmasining qisqa yozilishi).

2. Ikkinchi tartibli hosilaning maxanik ma’nosi

Moddiy nuqta to’g’ri chiziq bo’ylab $s = s(t)$ qonun bilan harakat qilayotgan bo’lsin, bu yerda $s-$nuqtaning $t-$vaqt oralig’iba bosib o’tgan yo’li. U holda bu harakatning $v-$tezligivaqtning biror funksiyasidir: $v = v(t)$. Vaqtning t momentida tezlik $v = v(t)$qiymatga ega bo’ladi. Vaqtning boshqa $t+\Delta t$ momentini qaraymiz. Unga tezlikning $v_1 = v(t+\Delta t)$ qiymati mos keladi. Vaqtning Δt orttirmasiga tezlikning $\Delta v = v_1 - v = v(t+\Delta t) - v(t)$ orttirmasi mos keladi.

$\dfrac{\Delta v}{\Delta t} = w_{o'rt}$ nisbat vaqtning Δt oraliqdagi <u>*o’rtacha tezlinishi*</u> deyiladi.

t *momentdagi* w *tezlaninsh* deb $\Delta t \to 0$ dagi o’rtacha tezlaniishining limitiga aytiladi:

$$w = \lim_{\Delta t\to 0} w_{o'rt} = \lim_{\Delta t\to 0}\frac{\Delta v}{\Delta t} = v'_t.$$

Shunday qilib, *to'g'ri chiziqli harakatning tezlanishi deb vaqt bo'yicha olingan tezlikning hosilasiga aytiladi.*

Biz ko'rdikki, tezlik s yo'lning t vaqt bo'yicha olingan hosilasi ekan: $v = s'$. Buni hisobga olib,

$$w = v'_t = (s')' = s''$$

ga ega bo'lamiz.

Shunday qilib, *to'g'ri chiziqli (tekis) harakatning tezlanishi yo'lning vaqt bo'yicha olingan ikkinchi tartibli hosilasiga teng* ekan.

1- misol. Moddiy nuqtaning tekis harakati $s = \frac{t^3}{3}$ vonun bilan ro'y berayotgan bo'lsin, bu yerda t vaqt sekundlarda, s yo'l esa santimetrlarda ifodalangan bo'lsin. Harakat qilayotgan nuqtaning $t = 5c$ momentidagi w tezlanishini toping.

Yechilishi: Formulaga ko'ra:

$$w = s'' = \left(\frac{t^3}{3}\right)'' = t^2$$

ga ega bo'lamiz. Demak izlanayotgan tezlanish

$$w\big|_{t=5} = t^2\big|_{t=5} = 25\ (ñì\ / ñ^2).$$

3. Giperbolik funksiyalar va ularni differensiallash

Matematik analizning ko'pgina tadbiqlarida ko'rsatkichli funksiyalarning $\frac{1}{2}\left(e^x + e^{-x}\right)$ va $\frac{1}{2}\left(e^x - e^{-x}\right)$ ko'rinishdagi kombinasiyalari uchraydi. Bu kombinasiyalar yangi funksiyalar deb qaralib,

$$shx = \frac{1}{2}\left(e^x - e^{-x}\right) \text{ - (giperbolik sinus),}$$

$$chx = \frac{1}{2}\left(e^x + e^{-x}\right) \text{ - (giperbolik kosinus)}$$

ko'rinishda belgilanadi.

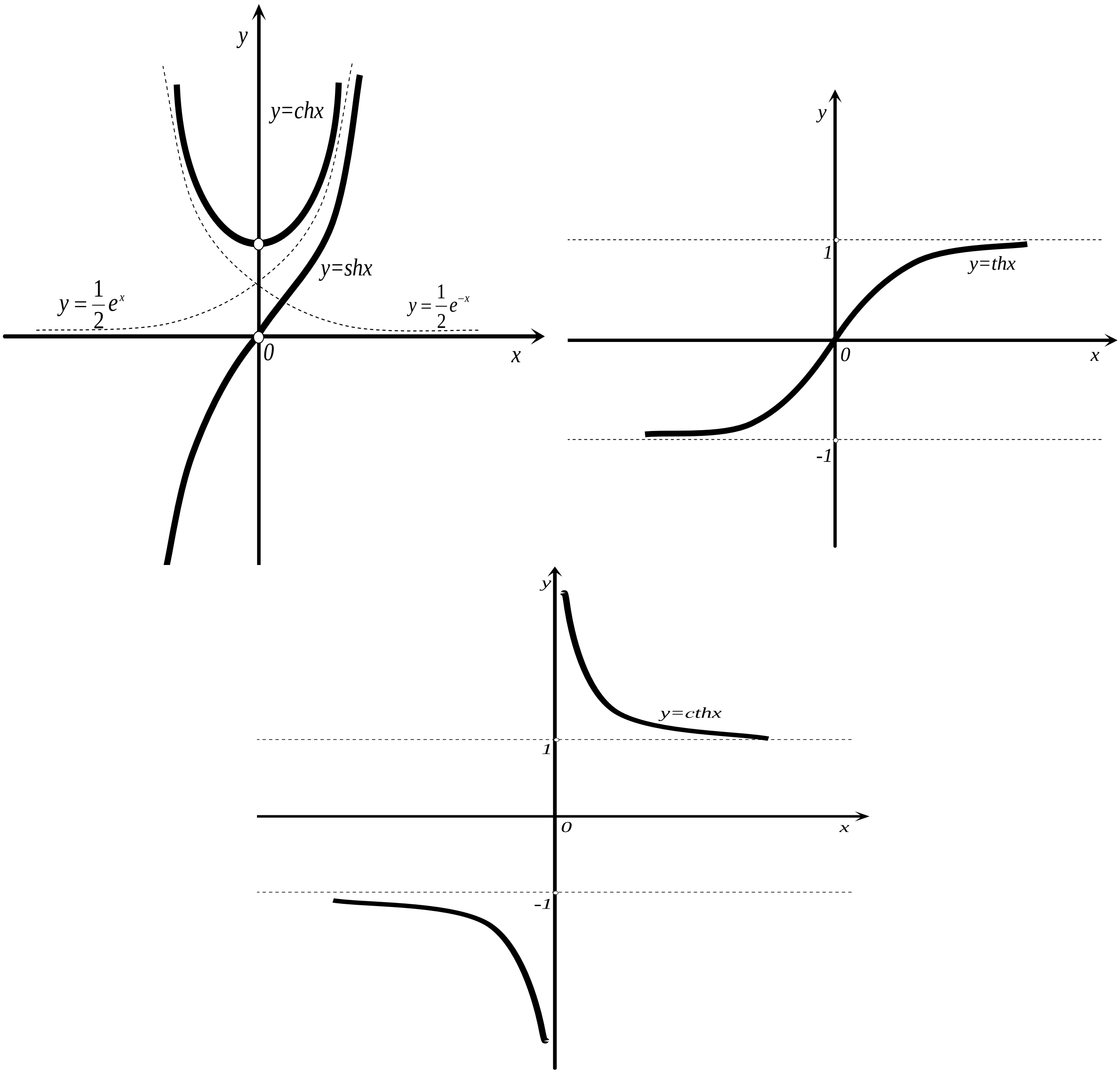
Shu bilan bir qatorda

$$thx = \frac{shx}{chx} = \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}} \text{ - (tangens giperbolik),}$$

$$cthx = \frac{chx}{shx} = \frac{e^x + e^{-x}}{e^x - e^{-x}}$$ - (kotangens giperbolik) funksiyalar ham qaraladi.

shx, *chx* , *thx* funksiyalar *x* ning barcha qiymatlarida aniqlangan, *cthx* esa *x=0* nuqtadan bo'lak barcha qiymatlarda anilangandir.

Giperbolik funksiyalarning grafigi 1- shaklda berilgan.



1-shakl

Izoh: Ma'lumki $x^2 + y^2 = 1$ aylana tenglamasini $x = \cos t$, $y = \sin t$, funksiyalar bilan parametrik tasvirlash mumkin:

$$x^2 + y^2 = \cos^2 t + \sin^2 t = 1$$

Shu sababli, *cos t, sin t* funksiyalar «*doiraviy funksiyalar*» - deb yuritiladi.

shx, chx larni giperbolik funksiyalar deb nomlashga sabab, ulardan $x^2 - y^2 = 1$ giperbolaning tenglamasini parametrik ko'rinishga keltirishda foydalanishdir. Haqiqatan ham, $x = cht$, $y = sht$ tenglamalar $x^2 - y^2 = 1$ giperbolaning parametrik tenglamasidir, chunki $ch^2 t - sh^2 t = 1$.

Giperbolik funksiyalarning hosilalari

$$(shx)' = chx; \quad (chx)' = shx; \quad (thx)' = \frac{1}{ch^2 x}; \quad (cthx)' = -\frac{1}{sh^2 x}$$

formulalar bilan aniqlanadi.

Bu formulalarni isbotlash uchun giperbolik funksiyalar ta'rifidan va differensiallash qoidalaridan foydalaniladi.

Masalan,

$$(shx)' = \left[\frac{1}{2}\left(e^{x} - e^{-x}\right)\right] = \frac{1}{2}\left(e^{x} + e^{-x}\right) = chx.$$